統計力学を用いた進化ゲーム理論 (第4回生物数学の理論とその応用)

吉川, 満

数理解析研究所講究録
第 1597 巻 2008 年 220-224

統計力学を用いた進化ゲーム理論[1)]

Evolutonary Game with Statistical Mechanics

*吉川満
*関西学院大学大学院経済学研究科経済学専攻

*Mitsuru KIKKAWA
* *Department of Economics, Graduate School of Economics, Kwansei Gakuin University, Nishinomiya 662-8501 JAPAN*
mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

This paper formulates Evolutionary Game Theory, with new idea, statistical mechanics. When each players game with the nearest-neighbor and random matching, it is used the analogy with the simplest model, Ising model, SK model. It is thought that the emergence of equilibrium caused the phase-transition. As a result, the theoretical calculation gives agreement with the traditional evolutionary game theory at the size of a parameter. In infinite agents game, it showed that it does not have equilibrium.

Moreover, using the Master equation, it made the model of the dynamics. It is derived that the dynamics equation of the ordered parameter, a kind of Replicator equation. It showed to do the one to have considered exteriority, this paper shows that it has the multiple equilibria, in Quenched System.

1. はじめに

今まで進化ゲーム理論は現在主に戦略の頻度の動学を表す, Replicator 方程式を使うものとそれを用いず, 遷移確率とノイズに着目した確率進化ゲーム (Stochastic Evolutionary Game) の 2 つがある. 本稿は進化ゲーム理論に統計力学を導入し, 多様な構造を記述することができる新たな進化ゲーム理論を提案する.

統計力学を用いて, 進化ゲーム理論を分析した直接的な先行研究は Diederich and Opper [1], Tokita and Yasutomi [4] などがある. これらは物理学の分野で研究されている「乱れた系＝スピングラス (spin glass)」の研究を基礎として進化ゲーム理論に応用させている. そこでは進化ゲーム理論の基本的な事柄が明確ではなく, そのまま応用させたように感じるので, 本稿では基本的な概念から進化ゲーム理論を構築した. より具体的には統計力学で最も単純な Ising モデル, それを拡張した SK(Sherrington-Kirkpatrick) モデル [3] を用いて, 高次元の進化ゲーム理論の構築を行った.

本稿は次のように構成されている. 第 2 節で, 最近接格子とゲームを行うモデルを定式化する. 第 3 節で, ランダムにマッチングし, ゲームを行うモデルを Annealed 系と Quenched 系で定式化し, 秩序パラメータを求める. 第 4 節で, Master 方程式を用いて, 動学のモデルにした. 第 5 節で, 結論を述べる.

2. 最近接相互作用 (Ising モデル)

本節では統計力学で最も単純なモデルである, 格子モデルを進化ゲーム理論に導入する. よってここでは有限であるが, かなり多数の主体がいて, 2 タイプの主体が 1 対 1 で出会い, 戦略を 2 つを持ち, ゲームを行うとする.

そこで本稿ではこの格子上の各要素を主体と見て, その主体が戦略を 2 つ持って, 1 つ変数を入れ, どのようなときに戦略があるに揃ったり, またはランダムに分布するのかということを考える.

具体的には 1 から N までの整数の集合 $V = \{1, 2, \cdots, N\} \equiv \{i\}_{i,\cdots,N}$ を格子, その要素 i をサイト (site) あるいは格子点と呼ぶことにする. サイト 2 個の組を適当に集めた集合 $B = \{(ij)\}$ を作り, その各要素 (ij)(ボンドあるいは結合) は隣同士の組 (最近接 (nearest neighbor) 格子点対) でゲームを行う. そこでの結果利得・適応度 (fitness) が対応していく. 伝統的な進化ゲーム理論では一列に並んで以前の行っているゲームを見て, 自分の戦略を決定するが, このモデルでは同時 (one-shot) にゲームを行う. よって動学理論ではなく, 静学理論である.

[1)]本稿は 2007 年 11 月 2 日生物数学の理論とその応用にて報告した内容を大幅に加筆・訂正したものである.

EXAMPLE 2.1 主体が 1, 2 がある戦略的な相互作用がある状況にあるとする. 特に戦略が 2 つ場合の対称 2 人ゲームを考える. 利得表 1 は各主体の戦略は $S_i = \{1,2\}, S_j = \{1,2\}$ である. また主体 1 の利得は $f_{11} = a$, $f_{22} = b$, $f_{ij}(i \neq j) = 0$ とする. 利得表 2 は統計力学で最も単純なモデルである Ising モデルと同様に記したものである. その各戦略が $+1, -1$ を持っている. ただしこのときのハミルトニアン (エネルギー, 利得) は, $a, b > 0$ である.

1 ＼ 2	戦略 1(+1)	戦略 2(+2)
戦略 1(+1)	a,a	0,0
戦略 2(+2)	0,0	b,b

利得表 1

1 ＼ 2	戦略 1(−1)	戦略 2(+1)
戦略 1(−1)	a,a	0,0
戦略 2(+1)	0,0	b,b

利得表 2

ASSUMPTION 2.2 各主体は高い利得・適応度を得ることを望んでいる.

PROPOSITION 2.3[2]. ASSUMPTION 2.2 のもとでの主体 x のある戦略 $\{S_i\}, i = 1, \cdots, N$ を取り, ある利得 f を得るというゲームの状況下に戦略 $\{S_i\}$ の確率分布は次のようになる.

$$P(\{S_i\}) = Z^{-1} \exp(\gamma f). \tag{2.1}$$

ただし $\{S_i\}$ は主体 i の戦略, γ は変数[3], f はある戦略 $\{S_i\}$ を取ったときの利得・適用度, Z は規格化定数を表している. よって $\sum_{i=1}^{N} P(\{S_i\}) = 1$ となる. また $Z = \mathrm{Tr}\, \exp(\gamma f)$, (Tr をすべての要素配列についての和) と書くことも多い.

よってこの PROPOSITION 2.3 から, 利得 f が大きければ, その戦略をとる確率が高くなることを表している[4].

DEFINITION 2.4 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を秩序パラメータ (order parameter) という概念を次のように導入する.

$$m = \langle S_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S_i \equiv \Big(\sum_i S_i P(\{S_i\}) \Big). \tag{2.2}$$

ただし $\langle\ \rangle$ は平均を表している.

EXAMPLE 2.5 EXAMPLE 2.1 を例に取る. このとき $\{S_i\} = 1, 2, N = 2$ であるので, 各戦略を取ったときの秩序パラメータは,

戦略 1 を確率 1 でとる場合, $m = \frac{1}{2}$, 戦略 2 を確率 1 でとる場合, $m = 1$,
戦略 1 と戦略 2 をランダムにとる場合, $m = \frac{3}{4}$.

と計算できる. これから m の値は $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ の間で, $m = \frac{1}{2}$ に近ければ, 戦略 1 を取る人が多いと分かる. $m = 1$ に近ければ, 戦略 2 を取る人が多い. ランダムで戦略を取る場合は, $\frac{3}{4}$ であると分かる.

また Ising モデルでは, $S_i = \{-1, 1\}$ としているので, $m = 1, 0$(ランダム), -1 となる. γ が大きければ, 利得の大小関わらず $S_i = \{-1, 1\}$ のどちらか均衡へ収束する. γ が小さければ, 均衡へ収束せず, ランダムとなる. 利得によっては収束するが, そうではない場合, 収束しない場合もある. つまり秩序パラメータ m の値自身は関係なく, m の値からどちらの戦略の方が多く採用している, ランダムに取っているなど戦略の分布を示していることが分かる.

DEFINITION 2.6 (Weibull [5]) $x \in \Delta$ が進化的に安定な戦略 (Evolutionary Stable Strategy: ESS) であるとは, どのような戦略 $y \neq x$ に対しても, ある $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ が存在し, すべての $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$ について次の不等式が成り立つことをいう.

$$u\big[x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big] > u\big[y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big]. \tag{2.3}$$

PROPOSITION 2.7[5] DEFINITION 2.6 で定義した進化的安定な戦略は以下の条件と同値である.

---

[2] 証明は省略する. その導出の仕方は様々あるが, 等重率を仮定するとこの形となる. 詳細は統計力学の教科書を参照のこと.

[3] γ は変数であるが, このモデルではゲームを一斉に行い, 他者がどのような戦略を用いているのか分からない. そこでこの変数 γ が他者の行動を知らせる, 例えば正の情報量などを表している. よって変数 γ が最大のとき, 既存の進化ゲーム理論と同様になる. ただしその情報を得たとしても, その戦略をとる確率まで高くなるという外部性 (externality) を表していない.

[4] 進化ゲーム理論で一般に使われている Replicator 方程式は $\dot{x}_i = x_i((Ax)_i - x \cdot Ax), i = 1, \cdots, n$, A:利得行列, である. この方程式はある戦略 i を取ったときの自分の利得が平均利得よりも大きい場合には, その戦略を取る確率が高くなり, またゲームをしている周りの主体がその戦略を取る確率が高いほどその増加率も高くなる (外部性の存在), ということを示している. PROPOSITION2.3 はこの概念に対応しているが, 外部性は存在しない. しかし第 4 節で外部性が存在するものを取り扱う.

[5] 証明は省略するが, Weibull [5] などに記されている.

(2.4) $u(y,x) \leq u(x,x), \quad \forall y,$

(2.5) $u(y,x) = u(x,x) \Rightarrow u(y,y) < u(x,y), \quad \forall y \neq x.$

次に秩序パラメータ m を用いて, 進化的に安定な戦略の特徴づけを行う.

PROPOSITION 2.8[6] 統計力学を用いた進化ゲーム理論における進化的に安定な戦略とは次の条件を満たす.

(2.4) $u(y,x) \leq u(x,x), \quad \forall y,$ (*Equilibrium Condition*)

(2.6) $|m - m^*| < \varepsilon.$ (*Stability Condition*)

ただし m^* は変数 γ が均衡時の m の値を示している.

PROPOSITION 2.7 では, Nash 均衡の条件に, 安定性の条件 (漸近安定) を付け加えることによって, 進化的に安定な戦略と同値であることを言っているが, PROPOSITION 2.8 のように秩序パラメータを使い, それを Lyapunov 安定性の条件に代えることができるということを言っている. PROPOSITION 2.7 では静学はもとより, 動学の場合をも含んでいる. しかし PROPOSITION 2.8 は静学の場合のみを考えているので, Lyapunov 安定性の条件に代えることができる.

また非対称 2 人ゲームの場合はもう秩序パラメータを増やせば, それで足りる. 以上により統計力学を用いて, 進化ゲーム理論で最も単純な対称 2 人ゲーム, 非対称 2 人ゲームを定式化した.

3. ランダムな相互作用 (Sherrington-Kirkpatrick モデル)

前節の Ising モデルを基礎としたものでは, 戦略の数が 2 つであり, 最近接な相互作用がある場合を考えてきたが, 本節では戦略の数が 2 個あり, ランダムな相互作用をしているモデルを考える. よって様々な主体がおり, 戦略を 2 つ持ち, ランダムマッチングをし, 1 対 1 でゲームをする場合を考える. ゲームの結果秩序パラメータが最大となる値を求め, 均衡の生成の有無を考える. 特にここで取り上げるモデルは Sherrington-Kirkpatrick(SK) Model [3] である.

ここで利得・適応度は次のようになる.

(3.1) $$H(\{J_{ij}\}) = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j, \qquad \text{where} \qquad P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J^2}} \exp\left\{ -\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2} \right\}.$$

各主体は $i, j \in B$ であり, J_{ij} は確率分布 $P(J_{ij})$ に従ってランダムに分布しており, 平均が J_0 で, 分散が J^2 の Gauss 分布を表している. また $S_k = \{-1, 1\}$[7], $k = i, j$.

Annealed 系

この節でも ASSUMPTION 2.3 を満たしていると仮定する. 各主体間の相互作用の分布が主体の行動パターンと絡んでおり, 利得の高い方に変化する (PROPOSITION 2.4). これを一般に Annealed 系と呼ばれている. これに対して当初から主体間の相互作用の強さか決まっている系を Quenched 系という.

自由エネルギーの配位平均を求めるために, 自由エネルギー, 分布関数の配位平均は次のようになる.

(3.2) $$F = \gamma \log \langle Z \rangle,$$

(3.3) $$\langle Z \rangle = \sum_{\{S_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P\{J_{ij}\} \exp(\gamma H\{J_{ij}\}) = \sum_{\{S_i\}} \exp\left[\sum_{(ij)} \left\{ \gamma J_0 S_i S_j + \frac{(\gamma J)^2}{2} (S_i S_j)^2 \right\} \right]$$

これを秩序パラメータ m についての最適化問題を解く, つまり期待利得を最大にする秩序パラメータは, 次のようになる.

(3.4) $$\frac{\partial F}{\partial m} = 2\gamma^2 J_0 N^2 m + 2\gamma^3 J^2 N^4 m^3 = 0, \qquad m = 0 \text{ or } \pm\sqrt{\frac{-J_0}{\gamma J^2 N^2}}.$$

よって $m \neq 0$ となる m^* があることから, 高次元系でも戦略に何らかの秩序が存在することが分かった. つまり均衡の存在を明示しており, 後の議論は 2 節と同様の結論が得られる. また同様に非対称 2 人ゲームに拡張する場合も同様である. ただし主体が無限いるゲームでは均衡はしないということが分かった.

---

[6] 証明は省略する.

[7] この節でも $S_k = \{1, 2\}$ であっても構わない.

Quenched 系

ここでは Quenched 系を分析する．よってこのモデルでは当初から相互作用とその強さが決まっている[8]．特に先行研究 [1,4] ではこの Quenched 系を分析している．

(3.1) の下で Quenched 系での自由エネルギーは次のようになる．

(3.5) $$F=\gamma\langle\log Z\rangle.$$

これを標準的な解法を用いて，秩序パラメータ m についての最大化問題を解く，つまり期待利得を最大にする秩序パラメータは，次のようになる．

(3.6) $$m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{1}{2}z^2\Big)\tanh(\gamma\tilde{J}\sqrt{q}z+\gamma\tilde{J}_0n)dz.$$

よって Quenched 系の場合は今までのものとは異なり，tanh の関数となったが，秩序パラメータがランダムな場合と秩序がある場合があることが分かる．

4. 拡張：動学

今までが静学の分析であった．この節では Master 方程式を用いて動学にする [2][9]．格子点 $(1,2,\cdots,N)$ 上の主体の戦略 $(S_1,S_2,\cdots,S_N)$ の時刻 t における確率分布を $P(S_1,S_2,\cdots,S_N;t)$ とする．この時間変化は，次の Master 方程式に従うものとする．

(4.1) $$\frac{d}{dt}P(S_1,\cdots,S_N;t)=-\sum_i W_i(S_i)P(S_1,\cdots,S_N;t)+\sum_i W_i(-S_i)P(S_1,\cdots,-S_i,\cdots,S_N;t),$$

ただし $W_i(S_i)$ は，戦略が S_i から $-S_i$ に遷移する確率を表し，S_i 以外の戦略も含む．

これから平衡状態での遷移確率 $W_i(S_i)$ を求める．ここでは平衡状態となる十分条件，一般的には詳細釣り合い条件 (local detail balance condition)[10] を用いると次のようになる．

(4.2) $$\frac{W_i(S_i)}{W_i(-S_i)}=\frac{1-S_i\tanh(\gamma E_i)}{1+S_i\tanh(\gamma E_i)},\quad \text{where } E_i=\sum_k J_{ij}S_j.$$

これを満たす最も簡単な遷移確率 $W_i(S_i)$ は次のような関係である．

(4.3) $$W_i(S_i)=\frac{1}{2\tau}(1-S_i\tanh(\gamma E_i),$$

ただし τ は相互作用 J_{ij} もないときの戦略の変化時間を表す．よって秩序パラメータ (m) に関する時間発展方程式を (4.1) と (4.3) により導くと次のようになる．

(4.4) $$\tau\frac{d}{dt}\langle m\rangle_t=\langle\tanh\gamma E_i\rangle_t-m_t,$$

特に $t\to\infty$ の平衡系では，次を得る．

(4.5) $$m=\langle\tanh\gamma E_i\rangle.$$

よって自身の利得 $(\langle\tanh\gamma E_i\rangle_t)$ が秩序パラメータ m よりも大きい場合には，m は増加し，小さい場合には，m は減少することを示している．またこの方程式は進化ゲーム理論における Replicator 方程式に対応している[11]．

次に秩序パラメータが従う方程式に行列の固有値の特性を用いることによって均衡が発生する値を導出する．具体的には最大固有値 (Frobenius 根) を求め，そこから Perron-Frobenius の定理により安定，不安定の境界を求める．各主体がランダムにマッチし，ゲームするのでそのとき各主体が得ることができる利得はランダムに変化する．このことを表すことができるのが，Random 行列である．要素がランダムに変化することからある一定の法則があることが知られている．$J_{ij}=J_{ji}$ という仮定を設けても利得における Affine 変換可能であることから，この Random 行列理論は Hermite 行列と変形できる．その結果 Wigner の半円則 (semi-circle law) より最大固有値が求まり，Perron-Frobenius の定理を適用すればよい．

Annealed 系では秩序パラメータ m は常に一定であった．そこでここではもう一つ変数 h_j(外場からの影

---

8) ゲーム理論の文脈から考えると，この仮定は不自然であると感じられるが，生物学における食物連鎖などを想定すると，ある動物 A はある動物 B との相互作用を行うと，遺伝的に決まっているが，動物 C や D とは相互作用は行わない．よってこのようなことを想定しているシステムにおいては妥当である．ただし捕食-被食系のような縦の相互作用がある場合は非対称 2 にゲームする必要がある．

9) 動学の Ising モデルと Thouless-Anderson-Palmer(TAP) 方程式 [3] との関係について明示的に述べているものは存在しないが，本稿でも示すように同一の方法である．

10) $$\frac{W_i(S_i)}{W_i(-S_i)}=\frac{\exp(-\gamma E_iS_i)}{\exp(\gamma E_iS_i)},\quad \text{where } E_i=\sum_k J_{ij}S_j.$$

11) ただし Replicator 方程式は外部性が存在するが，この方程式は外部性は存在しない．脚注 4 を参照のこと．

響) を導入する. その結果各主体は周りを見ることができ, 周りの影響によっても利得が変化する場合を考える. その結果利得・適応度は (3.1) と比べ, 次のように変形する.

$$H(\{J_{ij}\}) = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j + \sum_j h_j S_j. \tag{4.6}$$

第 3 節と同様に自由エネルギー F を計算し, 秩序パラメータを求めると次のようになる.

$$h_j = 2\gamma m(1-N)(J_0 + J^2 m^2), \tag{4.7}$$

よってこの場合も秩序パラメータ m が不連続となる点がない. これは Annealed 系を仮定しているため, 主体が自ら利得を高く得るように行動しているから不連続となる点が存在しない.

次に Quenched 系の秩序パラメータの変化を調べる. ここで平衡点での秩序パラメータを (4.7) と同様に導出し, $\langle\ \rangle$ を tanh の中に移す近似を行うと Weiss 近似の表式が得られる.

$$m_i = \tanh \left\langle \gamma \Big(h_i + \sum_j J_{ij} m_j \Big) \right\rangle,$$

$J_0 = 0$ の周辺で展開すると,

$$m_i = \gamma \sum_j J_{ij} m_i - \gamma \sum_j J_{ij}^2 m_i + \gamma h_i + \cdots.$$

$N \times N$ の J_{ij} 行列の固有ベクトルによる展開を行う. 固有ベクトル $\{\langle i|\lambda\rangle\}$ は完全規格直交系とし, 固有値を J_λ とする $\Big(\sum_j J_{ij}\langle i|\lambda\rangle = J_\lambda \langle i|\lambda\rangle\Big)$. また, $m_\lambda = \sum_i m_i \langle i|\lambda\rangle, h_\lambda = \sum_i h_i \langle i|\lambda\rangle$ で, それぞれ λ モードを導入すると, 次を得る.

$$m_\lambda = \frac{1}{T - J_\lambda} h_\lambda, \quad \text{where} \quad T = \frac{1}{\gamma}.$$

最大固有値が J_Λ が $2J$, 最小固有値が $-2J$ その他の固有値はその間に半円則

$$\rho(J_\lambda) = \frac{2}{\pi J_\Lambda^2} \Big(J z_\Lambda - J_\lambda^2 \Big)^{1/2},$$

となるので, $T_C = 2J_\lambda$ である. つまり新たに均衡が生成するパラメーターの値は $2J_\lambda$ である.

以上から各主体は周りを見ることができ, 周りの影響によっても利得が変化し (外場の存在), Quenched 系の場合に秩序パラメータ m の非連続な変化, 分岐が起り, 多重解を持つということが分かった.

5. 結論

以上のように統計力学を用いて進化ゲーム理論を定式化を行った. その結果 Replicator 方程式を使うものや確率進化ゲームとは異なる新しいものとなった. そこでは空間に分布している主体が一斉にゲームを行い, どの程度戦略が一致しているのかを秩序パラメータを用いた. その結果秩序パラメータによっては通常の進化ゲーム理論と一致する場合や戦略の分布が全くランダムとなり, 既存のものと異なること場合があることが分かった. さらに主体が無限いるゲームでは秩序パラメータはゼロとなり, 戦略の分布はランダムとなるので, 均衡が生成されないということが分かった.

また Master 方程式を用いて, 動学のモデルにした. そこで Replicator 方程式に対応する, 秩序パラメータが変化する方程式を導出した. さらには外部性 (周辺のゲームに影響) を考慮したものを導出し, Quenched 系において多重均衡が生じていることを示した.

参考文献

[1] Diederich, S. and Opper, M.: *Physical Review A*, Vol.**39**, Number 8 (1989) pp.4333-4336.

[2] Glauber, Roy.J.: *Journal of Mathematical Physics*, Vol. **4**(1963), pp. 294-307.

[3] Mezard,Marc, Parisi, Giorgio and Virasoro, Miguel Angel.: *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific, 1987.

[4] Tokita, Keiichiro and Yasutomi, Ayumu.: *Physical Review E*, Vol.**60**(1999), pp.842-847.

[5] Weibull, Jörgen W.: *Evolutionary Game Theory*, MIT Press,1995.